曲線棒の振動に関する研究

氏　　　　名	鈴(すず)　木(き)　勝(かつ)　義(よし)
授　与　学　位	工　学　博　士
学位授与年月日	昭和53年9月13日
学位授与の根拠法規	学位規則第5条第2項
最　終　学　歴	昭和41年3月 山形大学工学部精密工学科卒業
学位論文題目	**曲線棒の振動に関する研究**
論文審査委員	東北大学教授　斎藤　秀雄　東北大学教授　玉手　統 東北大学教授　渥美　光　東北大学教授　八巻　昇

論　文　内　容　要　旨

最近機械の高速化，軽量化が進むと共に，機械振動の問題が一層重要になってきた。また機械の大型化，システム化の規模が一段と大きくなり，機械の一部分の振動問題でも全体に大きな影響を及ぼすようになった。加えて，従来強度の面からのみとらえられてきた機械振動が，騒音や振動の公害の面でも重要視されるようになり，技術者は新たな面での対応策を迫られている。

最近，振動問題の研究が多くなっているが，まだまだ基礎的研究の欠けている分野も多い。曲線棒の振動の研究もその一つである。化学プラント，火力，原子力プラント，冷暖房空調プラントの配管系，航空機，車輌の枠組，その他機械部品や土木建築関係でも曲線棒の振動は最近重要な問題になっている。特に配管系の耐震設計の面から重要視され，配管系の振動に関する研究がこれまで多数報告されている。解析方法として，構造物や機械系を質点系におきかえて解く方法，伝達マトリックス法，モーダルアナリシス法，レーリー・リッツの方法などが用いられている。ただし，これらの方法では，近似度をあげるためには多大な計算量が伴い，いずれも大型の電子計算機が必要である。

曲線棒のうち，もっとも代表的なものとして円弧棒がある。円弧棒の場合は，静力学的な変形問題はもちろん，動力学的な変形問題でも取り扱いが容易であり円弧棒や円環の自由振動問題は早くから取りあげられ，研究されている。今日では，これらの線形自由振動の問題はほぼ解決されているように思われる。しかしだ円弧棒やサイン曲線棒のような，曲率の変化する曲線棒の振

動に関しては，これまであまり研究されていない。最近，だ円弧棒の振動に関して二，三厳密解が報告されているが，まだ任意形状の曲線棒に適用できる解析解は見い出されていない。

これらの点を考慮し，本研究では，中心線が平面曲線で表される任意の一様曲線棒の自由振動問題を取り上げ，その振動特性を考察しようとするものである。本研究で示す方法は，種々の曲線棒に応用できる一般性をもち，小型の計算機で比較的簡単に，しかも厳密に計算できる長所をもっている。本方法はまず，曲線棒の自由振動の一周期間のラグランジュアンを，中心線に沿って測った弧の長さを表す変数 s を用いて一般形で求め，ハミルトンの原理によってラグランジュアンの停留条件から振動方程式，境界条件を求める。次に振動方程式を二通りの方法で解析する。

一つは，曲線棒の中心線の任意点の曲率を $1/\rho$ ，Gを長さの逆数の単位をもつ定数，$\Phi(x)$ を x の関数として次のような変数変換を用いる方法である。

すなわち

$$dx/ds = 1/\rho = \mathrm{G}\ \ \Phi(x)$$

この変換を用いることによって，振動方程式は s を変数とする方程式から x を変数とする方程式へ変換される。振動方程式のなかでは，$\Phi(x)$は$\Phi^2(x)$の形のみであらわれるので，この方法では，$\Phi^2(x)$ をさらに x のべき級数に展開し，振動方程式の厳密解を x のべき級数解で求めている。中心線がだ円，サイン，カテナリなどの通常用いられる曲線の場合は，曲率G $\Phi(x)$は簡単な式で表され，$\Phi^2(x)$ のべき級数展開も容易に求められる。なお x は，中心線上の s の原点における接線と任意の点における接線のなす角を表す変数である。

他の方法は，曲率を中心線の弧の長さで表して解く方法である。すなわち，代表長さを ℓ とし，

$$z = s/\ell, \qquad \ell/\rho = f(z)$$

として，振動方程式を z を変数とする方程式に変換して解く方法である。第1の方法と同様，振動方程式のなかでは，$f(z)$は$f(z)^2$ の形でのみあらわれるので，この方法でも，$f(z)^2$を z のべき級数に展開し，振動方程式の解を z のべき級数解で求めている。ただこの方法では，$f(z)$を正確に表すのは一般に困難で近似的に表すことが多く，得られる解も一般に近似的になる。しかし，この方法は曲率が複雑に変化する場合でも簡単に扱い得る便利な方法である。

本論文は7章より構成されている。

第1章は序論で，曲線棒（円弧棒も含めて）の振動に関する従来の研究を概観し，あわせて本研究の意義を簡単に解説している。

第2章では，中心線が平面曲線で表される一様な曲線棒が，その中心線のある平面内で振動する場合の解析方法を研究している。棒内のせん断変形および回転慣性の影響を無視し， Love によって求められた曲線棒の古典的な微少変形理論に基づき，一様な曲線棒の一周期間のラグランジュアンを求め，その停留条件から振動方程式と境界条件を定めている。振動方程式は，前述の二通りの方法で解析している。またこの章では，境界値（棒の両端における変位，傾斜，ねじり角）で表したラグランジュアンを求めている。接続系の振動，例えばだ円弧棒と直線棒との組合せ系などの振動を扱うときは，境界値で表したラグランジュアンを用いると便利である。もちろ

ん，境界値で表したラグランジュアンから単一系の場合（一つの式で棒の中心線の座標を表し得る場合）の振動方程式を求めることも簡単であり，その例題も二，三示している。

第3章では，中心線が平面曲線で表される一様曲線棒の，中心線のある面に垂直に振動する場合の解析方法を取り扱っている。面内振動の場合と同様，棒内のせん断変形，回転慣性は無視し，Love によって求められた，曲線棒の古典的な微少変形理論に基づき，一様な曲線棒の一周期間のラグランジュアンを求めその停留条件から，振動方程式と境界条件を定めている。振動方程式は，面内振動の場合と同じ二通りの手法で解析している。また面内振動の場合と同様に，未定境界値で表したラグランジュアンを求め，その応用例として，単一な対称形曲線棒の二，三の場合について，境界条件と振動方程式を求めている。

第4章では，第2章，第3章で述べた理論解析の，名種曲線棒への適用例を示している。厳密解法（変数 x を導入して解く方法）では，曲線棒として中心線がだ円，サイン，カテナリ，双曲線，パラボラおよびサイクロイド曲線で表される場合を考え，固有振動数，固有振動モードを求めている。主に対称形曲線棒を取り扱っているが，面内振動においては一部非対称形だ円弧棒，点対称形サイン曲線棒も取り扱っている。面内振動の場合，境界条件は対称形だ円弧棒に対しては，両端固定，両端支持，両端ロール，非対称形だ円弧棒およびその他の曲線棒ではすべて両端固定の場合を扱っている。また面外振動においては，境界条件は主に両端固定の場合を扱っているが，だ円弧棒については一部両端支持，両端ロールの場合も扱っている。曲率を中心線の弧の長さで表して解く近似解法の適用例としては，面内振動の場合，両端固定点対称形サイン曲線棒を，面外振動では両端固定対称形カテナリ，パラボラ，サイクロイド曲線棒を考え，固有振動数を求めている。近似解法では，曲率を弧の長さで表すので，解の収束が悪く曲線棒のあまり長いところまでは計算できないが，曲線棒が短い範囲では，得られた振動数曲線は厳密解のそれに良く合っている。またこの章では，理論値と実験値の比較についても示している。実験は，面内振動の場合，両端固定，点対称形サイン曲線棒および両端固定，対称形カテナリ，パラボラ，双曲線棒について，また面外振動の場合，両端固定，対称形だ円，カテナリ，パラボラ，サイクロイド曲線棒について行っている。いずれの場合も，理論値と実験値は非常に良く合っている。さらにこの章では，両端固定，対称形曲線棒の固有振動数について，直線棒の固有値（両端固定）から近似的に求めた無次元振動数（直線棒の解と呼んでいる）と厳密解との比較，レーレー・リッツの方法を用いて求められている既知の解との比較なども行っている。

第5章では，中心線が平面曲線で表される一様曲線棒の面内振動について，せん断変形および回転慣性を考慮して解析している。振動方程式および境界条件は曲線棒の一周期間のラグランジュアンを求め，その停留条件から定めている。また振動方程式は，第2章および第3章の古典理論における厳密解法と同じ手法で解析している。すなわち，中心線の弧の長さについての微係数が曲率に等しくなるような角度を表す変数を導入して，その変数についての振動方程式を厳密に解いている。数値例として，両端固定および両端支持された対称形だ円弧棒の固有振動数，固有振動モードを求めている。また古典理論による解析結果と比較し，せん断変形および回転慣性の固有振動数，固有振動モードに及ぼす影響を明らかにしている。細長比（棒の断面寸法と曲線の

形状寸法の比）が非常に小さい場合また棒の長さが非常に短い場合は，回転慣性およびせん断変形の固有振動数への影響は大きい。しかし，細長比が大きくなるにつれ，また曲線棒の長さが長くなるにつれて，その影響も小さくなっている。またモードについては，せん断変形回転慣性の影響はあまりないことが明らかにされている。

第 6 章では，第 2 章および第 3 章で求めた，境界値で表したラグランジュアンを用いて，任意形状の曲線棒と曲線棒，曲線棒と直線棒の接続系の振動を解析する方法を取り扱っている。具体例として，だ円弧棒と直線棒，カテナリ曲線棒と直線棒からなる両端固定，対称形U形棒の面内および面外振動について解析し，固有振動数，固有振動モードを求めている。

第 7 章は本研究のまとめである。

なお，本研究における数値計算は，山形大学工学部計算機センター，TOSBAC 3400，OKITAC 50 および東北大学大型計算機センター，NEAC 2200，モデル 200 のデジタルコンピューターによって行ったものである。

審 査 結 果 の 要 旨

航空機，車輌の枠組，プラントの配管系など機械構造物や機器には各種の形状を有する曲線棒がしばしば用いられる。これら構造部材の振動挙動の解明は振動工学における基本的課題の一つであり，円輪や円弧棒の場合については既に多数の研究が行われてきている。しかし軸線に沿って曲率の変化する任意形状の曲線棒の振動はその取り扱いが非常に繁雑となるため，厳密な解析的方法によってその性質を明らかにすることは従来あまり行われていない。著者はこれらの問題を解明するため，軸線が任意の平面曲線で表される一様棒の自由振動問題を取り上げ，独自の手法を用いて解析を行い，かつ本方法を多数の実例に適用してこれらの振動特性を明らかにした。本論文はこれらの成果をまとめたもので全編 7 章よりなる。

第 1 章は序論であり，従来の研究を概括し，本研究の目的および内容を説明している。

第 2 章および第 3 章では曲線棒がその軸線のある平面内においておよびその面に垂直に振動をする場合を解析している。まず曲線棒の振動一周期間のラグランジュアンを一般形で求め，その停留条件から運動方程式，境界条件を定める。次に角度を表す新しい変数を導入し運動方程式の厳密な解法を提示している。

第 4 章では第 2 章および第 3 章で得られた一般解法を各種形状の曲線棒に適用している。曲線棒としてだ円，サイン，カテナリ，双曲線，パラボラ及びサイクロイド曲線棒を取り上げ，固定，支持，滑動の三境界条件について面内および面外自由振動の固有振動数，振動モードを求めている。さらに著者は上記曲線棒の振動実験を行い，実験結果と理論解とはよく一致することを明らかにし，本解析法の妥当性を確認している。曲線棒部材の設計上極めて有用な資料を提供したものと評価される。

第 5 章では曲線棒の面内自由振動について，せん断変形および回転慣性をも考慮した修正理論を展開し，これら二つの固有振動数，固有振動モードに及ぼす影響を詳細に解明している。これらは貴重な成果である。

第 6 章では任意形状の曲線棒と直線棒の接続系について面内および面外自由振動を解析している。さらに本解法をだ円弧棒あるいはカテナリ曲線棒と二本の直線棒からなる接続系に適用して，その振動特性を明らかにし，また実験とも対比している。

第 7 章は結論である。

以上要するに本論文は，軸線にそって曲率の変化する平面内曲線棒の振動を正確に解析する方法を研究し，これを各種の具体例に適用して多くの有用な知見を与えたもので，振動工学並びに機械工学に寄与するところが少なくない。

よって，本論文は工学博士の学位論文として合格と認める。